12．BOX-COX回帰

"見たことのないことを追求する人には、どんなモデルも存在しない。"

Paul Eluard
芸術家

BOXコマンドはBox-Cox変換で推定する方法を提供している。Zarembka[1974, Chapter 3]、Greene[1993, Chapter 11.4]、Judge, Hill, Griffiths, Lükepohl and Lee[1988, Chapter 12.5]、Magee[1988]、White[1972]、Savin and White[1978]を参考にせよ。LAMBDAコマンドを使用すれば、どのような変数にも正確なベキ変換を課すことができる。非正値を含む変数は自動的に変換されないようにできる。

古典的Box-Coxモデル

変数 $Y=(Y_1\ Y_2\ ...\ Y_N)'$ について、次の変換を考える。

$$
\begin{aligned}
Y_t^{(\lambda)} &= \frac{Y_t^{\lambda}-1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\
&= \ln Y_t & \lambda = 0
\end{aligned}
$$

Box-Coxモデル(Box and Cox[1964]より)は次のように書ける。

$$Y^{(\lambda)} = X\beta + \varepsilon$$

ここで、Xは独立変数の観測値のNxK行列であり、εは$E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I_N$なるNx1のランダムな撹乱項である。

対数尤度関数は、

$$L\left(\lambda, \beta, \sigma^2; Y, X\right) = -\frac{N}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}(Y^{(\lambda)} - X\beta)'(Y^{(\lambda)} - X\beta) + \ln J$$

であり、ここで、 $J = \det\left[\frac{\partial Y^{(\lambda)'}}{\partial Y}\right] = \prod_{t=1}^{N} Y_t^{\lambda-1}$

は従属変数の変換のヤコビアンである。与えられたλの下で、σ^2とβについての対数尤度関数の最大化は、次の推定量を与える。

$\hat{\beta}(\lambda) = (X'X)^{-1}X'Y^{(\lambda)}$ 　また　 $\hat{\sigma}^2(\lambda) = \frac{1}{N}(Y^{(\lambda)} - X\hat{\beta}(\lambda))'(Y^{(\lambda)} - X\hat{\beta}(\lambda))$.

代入により次の集約対数尤度関数を与える。

$$L^*(\lambda; Y, X) = -\frac{N}{2}\{\ln(2\pi)+1\} - \frac{N}{2}\ln\hat{\sigma}^2(\lambda) + (\lambda-1)\sum_{t=1}^{N}\ln Y_t$$

推定方法の第一段階は、L^*を最大にするようなλの推定値を見つけることである。SHAZAMはこれを反復アルゴリズムで行う。次に推定量$\tilde{\lambda}$は以下のβの推定値を得るために用いられ、

$$\tilde{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y^{(\tilde{\lambda})}$$

またσ^2の推定値は次のように計算される。

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{N-K}(Y^{(\tilde{\lambda})} - X\tilde{\beta})'(Y^{(\tilde{\lambda})} - X\tilde{\beta})$$

DNオプションを用いるなら、除数はN-Kの代わりにNになる。$\tilde{\beta}$の共分散行列は次のようになる。

$$\tilde{\sigma}^2(X'X)^{-1}$$

この共分散行列は、$\lambda = \tilde{\lambda}$なる条件の条件付標準誤差になる。条件付と条件なしの標準誤差については、Judge, Hill, Griffiths, Lükepohl and Lee[1988, pp.558-9]を見よ。

標本平均で評価されたBox-Coxモデルでの弾力性は、次のようになる(Savin and White [1978]をみよ)。

$$E_k = \tilde{\beta}_k \frac{\overline{X}_k}{\overline{Y}^{(\tilde{\lambda})}}$$

Poirier and Melino[1978]は、Box-Cox変換を用いたときの回帰変数について、Yの期待値の変化の導出について議論している。

拡張Box-Coxモデル

Box-Coxモデルは、従属変数と独立変数のセットの両方が同様に変換されるように拡張することができる。このモデルは次のように書ける。

$$Y^{(\lambda)} = X^{(\lambda)}\beta + \varepsilon$$

ここで、モデル中のすべての変数を変換するのに同じλの値が用いられる。この場合、従属変数に加えて回帰変数が変換されることを除けば、対数尤度関数は前に与えられたようになる。前のモデルのように、最大にする値$\tilde{\lambda}$を見つけるような反復方法で推定が行

われる。これは次にパラメータ推定値$\tilde{\beta}$を見つけるために用いられる。このモデルでは、変数の平均で評価される弾力性は次のように計算される。

$$E_k = \tilde{\beta}_k \frac{\overline{X}_k^{(\tilde{\lambda})}}{\overline{Y}^{(\tilde{\lambda})}}$$

Box-Tidwellモデル

Box-Coxモデルには、従属変数の変換なしに、異なったλでそれぞれの独立変数を変換するというものもある。このモデルはBox-Tidwellモデルとして知られており（Box and Tidwell[1962]をみよ）、次のようになる。

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1^{(\lambda_1)} + \beta_2 X_2^{(\lambda_2)} + \ldots + \beta_k X_k^{(\lambda_k)} + \varepsilon$$

従属変数の変換がないので、Box-Tidwellモデルの対数尤度関数はヤコビアン項がない。モデル推定後、弾力性は次のように計算される。

$$E_k = \tilde{\beta}_k \frac{\overline{X}_k^{(\tilde{\lambda}_k)}}{\overline{Y}}$$

Box-Cox、Box-Tidwell結合型モデル

BOXコマンドのFULLオプションは、独立変数、従属変数すべての変数について、異なったλの値で変換されるような、Box-Cox、Box-Tidwell結合型の推定を行う。

Box-Cox自己回帰モデル

Box-Cox自己回帰モデル(Savin and White[1978])は次のように与えられる。

$$Y_t^{(\lambda)} = X_t'\beta + \varepsilon_t \qquad \text{ここで} \qquad \varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t \ , \quad |\rho| < 1 \ ,$$

また、 $E(v_t^2) = \sigma_v^2$ である。

対数尤度関数は、

$$L\left(\lambda, \rho, \beta, \sigma_v^2; Y, X\right) = -\frac{N}{2}\ln\left(2\pi\sigma_v^2\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1-\rho^2\right) - \frac{1}{2\sigma_v^2}\left(Y^{(\lambda)} - X\beta\right)'\Omega^{-1}\left(Y^{(\lambda)} - X\beta\right) + \ln J$$

であり、ここで、

$$
\Omega^{-1}=E[\varepsilon\varepsilon']^{-1}=\begin{bmatrix}
1 & -\rho & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\
-\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & 0 & -\rho & \cdot & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & & \\
 & \cdot & \cdot & & & & 1+\rho^2 & -\rho \\
0 & 0 & 0 & & & & -\rho & 1
\end{bmatrix}
$$

となる。

従属変数の変換についてのヤコビアンは、

$$
\mathrm{J} = \det\left[\frac{\partial \mathrm{Y}^{(\lambda)\prime}}{\partial \mathrm{Y}}\right]
$$

であり、ここで、

$$
\left[\frac{\partial \mathrm{Y}^{(\lambda)\prime}}{\partial \mathrm{Y}}\right]=\begin{bmatrix}
\mathrm{Y}_1{}^{\lambda-1} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\rho\mathrm{Y}_2{}^{\lambda-1} & \mathrm{Y}_2{}^{\lambda-1} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\rho^2\mathrm{Y}_3{}^{\lambda-1} & \rho\mathrm{Y}_3{}^{\lambda-1} & \mathrm{Y}_3{}^{\lambda-1} & & & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & & & \cdot & \\
\rho^{N-1}\mathrm{Y}_N{}^{\lambda-1} & \rho^{N-2}\mathrm{Y}_N{}^{\lambda-1} & \cdot & \cdot & \cdot & & \mathrm{Y}_N{}^{\lambda-1}
\end{bmatrix}
$$

である。

これは、NxNの三角行列であり、三角行列の行列式は対角要素の積である。したがって、次のようになる。

$$
\mathrm{J} = \prod_{t=1}^{N} \mathrm{Y}_t^{\lambda-1}
$$

与えられたλとρにおける、βとσ_v^2についての対数尤度関数の最大化により、

$$
\hat{\beta}(\lambda,\rho) = \left(\mathrm{X}'\,\Omega^{-1}\,\mathrm{X}\right)^{-1}\mathrm{X}'\,\Omega^{-1}\,\mathrm{Y}^{(\lambda)}
$$

また、

$$
\hat{\sigma}_v^2(\lambda,\rho) = \frac{1}{N}[\mathrm{Y}^{(\lambda)}-\mathrm{X}\hat{\beta}(\lambda,\rho)]'\,\Omega^{-1}\,[\mathrm{Y}^{(\lambda)}-\mathrm{X}\hat{\beta}(\lambda,\rho)]
$$

となる。

これらの推定値の対数尤度関数関数への代入により、次の集約対数尤度関数が得られる。

$$L^*(\lambda, \rho; Y, X) = -\frac{N}{2}\{\ln(2\pi)+1\} - \frac{N}{2}\ln\tilde{\sigma}_v^2(\lambda,\rho) + \frac{1}{2}\ln(1-\rho^2) + (\lambda-1)\sum_{t=1}^{N}\ln Y_t$$

L^*を最大にするような推定値$\tilde{\lambda}$と$\tilde{\rho}$を見つけるために、格子探索が用いられる。すると、の推定値βは次にように得られ、

$$\tilde{\beta} = (X'\tilde{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\tilde{\Omega}^{-1}Y^{(\tilde{\lambda})}$$

λで条件つけられた、係数の推定された共分散行列は次のようになる。

$$\tilde{\sigma}_v^2(X'\tilde{\Omega}^{-1}X)^{-1}$$

ここで、

$$\tilde{\sigma}_v^2 = \frac{1}{N-K}(Y^{(\tilde{\lambda})} - X\tilde{\beta})'\tilde{\Omega}^{-1}(Y^{(\tilde{\lambda})} - X\tilde{\beta})$$

である。

DNオプションを用いると、除数はNではなくN-Kになる。

拡張Box-Cox自己回帰モデル

すべての変数を同じλで変換する拡張Box-Cox自己回帰モデルは、先に説明したものと同様の方法で推定できる。 拡張Box-Cox自己回帰モデルは、BOXコマンドでAUTOとALLオプションが必要である。

BOX*コマンドオプション*

一般的にBOXコマンドの書式は、

BOX *depvar indeps / options*

となる。ここで、*depvar*は従属変数、*indeps*は独立変数のリスト、*options*は必要なオプションの一覧である。BOXコマンドで利用可能なオプションの中にはOLSコマンドと異なるものがある。特に、通常の変換は回帰式中に切片を必要とするので、NOCONSTANTオプションは修正変換を行う（詳しくは以下参照）。OLSコマンドで定義された利用可能なオプションは次のとおりである。

ANOVA, GF, LIST, MAX, PCOR, PCOV, RSTAT, BEG=, END=, COV=, PREDICT=, RESID=

BOXコマンドで利用可能なオプションは次のとおりである。

ACCUR
: 通常、SHAZAMは0.01の精度でλを推定する。このオプションを指定すると多少の計算時間の増加を伴うが、SHAZAMは0.001の精度で反復計算を行う。

ALL
: （制約がなければ）すべての変数が同じベキ乗変換されるような拡張Box-Coxモデルを用いる。このオプションがないと、従属変数だけが変換される。拡張Box-Coxモデルは、古典的モデルに比べ推定が難しい。例えば、古典的モデルは4回反復計算する。ALLオプションはしばしば20回の反復を必要とする。

AUTO
: λと1次の自己相関のパラメータであるρを同時に推定する。この方法は、Savin and White[1978]の方法による。このオプションは100回以上の反復計算を必要とするので非常に遅い。λとρに関して0.01の精度が得られる（ACCURオプションはこのオプションと同時に使用できない）。このオプションを使用すると、「*自己相関モデル*」の章で説明したDROP,NMISS=,GAP=が使用できる。以下に説明するRHO=オプションも使える。AUTOオプションでのλの範囲は(-2,3.5)に設定され、変更はできない。コーナー解をチェックすることは重要である。

DN
: σ^2を推定する際、N-KではなくNを除数とする。

DUMP
: AUTOオプションと共に用いて、反復計算の中間の結果を得る。この結果は通常価値はないが、格子探索に関する有用な情報を含むことがある。

FULL
: 式中のすべての変数が異なったλをもつ、Box-Cox、Box-Tidwell結合型を実行する。このオプションでは多くの反復計算が要求されるので、いくぶん遅くなる。Box-Tidwell回帰に関する警告は、FULLオプションについても当てはまる。実際、このオプションではオバーフローは普通であるので、注意して使用すること。RESTRICTコマンドは使用できない。ALL，AUTO，LAMBDA=，LAMS=，LAME=，LAMI=オプションをTIDWELL，FULLオプションと共用できない。

NOCONSTANT
: 切片のないモデルを推定する。切片のないBox-Coxモデルは適切に定義されなく、モデルは一般的に尺度に対して不変ではない。このオプションで使用される変換は、 $X_t^{(\lambda)} = X_t^{\lambda}/\lambda$ ただし $\lambda \neq 0$ のように、Zarembka[1974]によるものである。さらに、SHAZAMは0.0の代わりに0.01の値を使用し、尤度関数はλ=0で連続ではない。黄金分割探索アルゴリズムを使用する。

RESTRICT	線型のパラメータ制約を課す。制約は、この章で後述するLAMBDAやRESTRICTコマンドで指定される。RESTRICTオプションはFULL、TIDWELLオプションと共用できない。
TIDWELL	Box-Cox回帰の代わりにBox-TIDWEL回帰を行う。独立変数だけが変換され、それぞれの変数は異なったλを持つ。この手法の詳細はBox and Tidwell[1962]を参照せよ。この方法では、すべての独立変数は厳密に正値でなければならない。Box-Tidwellの方法は、しばしば収束せず実行が停止する原因となるので注意せよ。パラメータの中の1つが大きな分散を持つような小サンプル数の場合にしばしば生じる。これが起きたときは、データの単位を小さくすると成功することがある（例えば、すべての変数を100で割る）。RESTRICTコマンドは使用できない。ALL，AUTO，LAMBDA=，LAMS=，LAME=，LAMI=オプションはTIDWELL，FULLオプションと共用できない。
UT	残差の計算とプロットを行うために、観測値と従属変数の予測値を変換しない。すべての値は元の形式のままである。変換された残差と予測値の解釈が困難なときに、このオプションは有用である。しかし、このオプションではデータを別に処理するので時間がかかる。変換されない残差は0の平均値を持たない。このオプションは回帰の結果には影響を与えないことに注意せよ。残差の表示だけが影響を受ける。
COEF=	各独立変数と従属変数のλ、およびAUTOオプションを使用したときのρを保存する。
LAMBDA=	必要なLAMBDAの値を指定する。このオプションによって無駄な反復は避けられる。
LAMS= LAME= LAMI=	このオプションはλに関し手動で格子探索を行う。λの初期値(LAMS=)、λの終値(LAME=)、λの増分値(LAMZ=)を指定する。最適なλが決定している場合はLAMBDA=オプションで指定できる。手動の格子探索はほとんど必要とされない。反復方法が失敗したときに必要になるかもしれない。AUTOオプションを指定しているとき、手動の格子探索は使用できない。
RHO=	AUTOオプションを指定したとき、用いるべきRHOを指定する。

BOXコマンドで利用可能な一時変数は次の通りである。

$ADR2, $ANF, $DF, $DW, $ERR, $K, $LLF, $N, $R2, $R2OP, $RAW, $RHO, $SIG2, $SSE, $SSR, $SST, $ZANF, $ZDF, $ZSSR, $ZSST

一時変数の詳細な情報については「*その他のコマンドと情報*」と「*最小二乗法*」の章を参照せよ。

上で述べたように、SHAZAMは、Box-Cox回帰を推定するために反復法を使用している。反復の途中で不動小数点のオーバーフローのためにプログラムの実行が停止する場合がある。このような場合には、100や1000のような定数ですべての変数を除す事で、データの尺度を縮小した方がよい。しかし、データの単位が当初より大きくない場合には、通常問題にならない。Box-Cox回帰では多くの反復が必要なので大きな標本数では費用がかかる。使用されている最大尤度法が小標本向きでなく、さらに小標本での使用が無意味な結果を生むことがあるで注意すること。

例

以下の出力はTheilの繊維データにBOXコマンドを使用した例である。

```
 |_BOX CONSUME INCOME PRICE / DN ALL

DEPENDENT VARIABLE =CONSUME
DN OPTION IN EFFECT - DIVISOR IS N
BOX-COX REGRESSION       17 OBSERVATIONS

ITERATION LAMBDA   LOG-L.F.     GRADIENT   R-SQUARE     SSE       SSE/N
   1       .000  -46.5862      .466329E-01   .9744   .13613E-01   .80077E-03
   2      1.000  -51.6471     -5.06084      .9513   433.31       25.489
   3      -.618  -46.4049     -3.23983      .9762   .31739E-04   .18670E-05
   4     -1.000  -48.0606      4.33477      .9722   .92261E-06   .54271E-07
   5      -.382  -46.0401      3.26927      .9767   .30541E-03   .17965E-04
   6      -.236  -46.0919     -.354947      .9762   .12787E-02   .75217E-04
   7      -.472  -46.1138      .927319E-01   .9766   .12763E-03   .75075E-05
   8      -.326  -46.0353      .538015      .9766   .52622E-03   .30954E-04
   9      -.292  -46.0476     -.358561      .9765   .73786E-03   .43404E-04
  10      -.348  -46.0335     -.253926      .9766   .42730E-03   .25135E-04
  11      -.361  -46.0346      .861095E-01   .9766   .37579E-03   .22106E-04
  12      -.339  -46.0336      .457475E-01   .9766   .46264E-03   .27214E-04
  13      -.353  -46.0337      .536509E-02   .9766   .40683E-03   .23931E-04
  14      -.344  -46.0335      .302815E-01   .9766   .44046E-03   .25910E-04
  15      -.342  -46.0335     -.195690E-01   .9766   .44880E-03   .26400E-04
  16      -.346  -46.0335     -.136884E-01   .9766   .43538E-03   .25611E-04
  17      -.350  -46.0336      .235114E-01   .9766   .41708E-03   .24534E-04

BOX-COX REGRESSION FOR LAMBDA =    -.350000

 R-SQUARE =    .9766    R-SQUARE ADJUSTED =    .9733
VARIANCE OF THE ESTIMATE-SIGMA**2 =   .24534E-04
STANDARD ERROR OF THE ESTIMATE-SIGMA =   .49532E-02
SUM OF SQUARED ERRORS-SSE=   .41708E-03
MEAN OF DEPENDENT VARIABLE =   134.51
LOG OF THE LIKELIHOOD FUNCTION = -46.0336

                         ASYMPTOTIC
                        CONDITIONAL                           BOX-COX
VARIABLE   ESTIMATED  STANDARD   T-RATIO       PARTIAL STANDARDIZED ELASTICITY
  NAME    COEFFICIENT   ERROR   ***** DF   P-VALUE CORR. COEFFICIENT  AT MEANS
INCOME     1.1535      .1260      9.152     .000  .926      .3493     1.2665
PRICE     -.68995      .2606E-01  -26.48     .000 -.990    -1.0106     -.8413
CONSTANT   1.2292      .2810      4.375     .000  .760      .0000     6.8342
```

ALLオプションを指定したので、SHAZAMはすべての変数を同一のλで変換している。λ=1は線型モデル、はλ=0両対数モデルになる。

i回目の反復において、$L^{(i)}$を対数尤度関数の値、$\tilde{\lambda}^{(i)}$をλの推定値とする。この推定において、λについての対数尤度関数の出力GRADIENTは次のように近似される。

$$\left(L^{(i)} - L^{(i-1)}\right) / \left(\tilde{\lambda}^{(i)} - \tilde{\lambda}^{(i-1)}\right)$$

このλの値についての仮説検定を尤度比検定で行うことができる。線型モデルの検定について、検定統計量は、

$$2\,[L(\tilde{\lambda}) - L(\lambda = 1)]$$

となる。

これは$\chi^2_{(1)}$分布と比べられる。この出力から検定統計量は、

$$2(-46.0336 + 51.647054) = 11.23$$

である。

統計表から5%棄却値は3.84、1%棄却値は6.64である。検定統計量はこれらを上回るので、線型モデルは棄却される。

制約のあるBOX-COX

λのいくつかに制約を課したいとする。BOXコマンドでRESTRICTオプションを用いれば、LAMBDAコマンドが制約を課すために用いられる。ALLオプションが有効でなければ、右辺の変数はどんなλについても制約を課すことができる。制約のないものは変換されないままになる。RESTRICTコマンドを使用するなら、すべてのLAMBDAコマンドの後に続けなければならない（これらはオプションである）。コマンドの詳細は「*最小二乗法*」の章の制約付最小二乗の節をみよ。ENDコマンドは、すべてのLAMBDAとRESTRICTコマンドの後に続けること。TIDWELLまたはFULLオプションを使用した場合は、λに制約を課すことはできない。制約付推定の一般的な書式は次のようになる。

BOX *depvar indeps* / RESTRICT *options*
LAMBDA *var1=value1 var2=value2 . . .*
RESTRICT *equation*
END

次のSHAZAM出力は、*INCOME*のλがλ=0に制約されているときの推定結果を示す。

```
|_BOX CONSUME INCOME PRICE / DN ALL RESTRICT
|_LAMBDA INCOME=0
|_END

DEPENDENT VARIABLE =CONSUME
```

```
DN OPTION IN EFFECT - DIVISOR IS N

LAMBDA RESTRICTIONS --- VARIABLE   LAMBDA
                     INCOME    .0000

BOX-COX REGRESSION       17 OBSERVATIONS

ITERATION LAMBDA   LOG-L.F.     GRADIENT   R-SQUARE    SSE       SSE/N
   1       .000  -46.5862      .466329E-01   .9744  .13613E-01  .80077E-03
   2      1.000  -51.5842     -4.99795       .9516  430.12       25.301
   3      -.618  -46.3158     -3.25604       .9764  .31408E-04  .18475E-05
   4     -1.000  -47.8558      4.03182       .9728  .90064E-06  .52979E-07
   5      -.382  -46.0048      2.99505       .9768  .30414E-03  .17891E-04
   6      -.236  -46.0778     -.500439       .9763  .12766E-02  .75092E-04
   7      -.472  -46.0605     -.731765E-01   .9768  .12683E-03  .74606E-05
   8      -.326  -46.0092      .351498       .9766  .52461E-03  .30859E-04
   9      -.416  -46.0168      .842899E-01   .9768  .21753E-03  .12796E-04
  10      -.361  -46.0030      .248213       .9767  .37440E-03  .22023E-04
  11      -.348  -46.0040     -.803312E-01   .9767  .42582E-03  .25048E-04
  12      -.369  -46.0032     -.417153E-01   .9767  .34581E-03  .20342E-04
  13      -.356  -46.0032     -.311991E-02   .9767  .39325E-03  .23133E-04
  14      -.364  -46.0030     -.270137E-01   .9767  .36321E-03  .21365E-04
  15      -.366  -46.0030      .207597E-01   .9767  .35646E-03  .20968E-04
  16      -.363  -46.0030      .151163E-01   .9767  .36744E-03  .21614E-04
  17      -.360  -46.0030     -.120099E-01   .9767  .37689E-03  .22170E-04

BOX-COX REGRESSION FOR LAMBDA =    -.360000

 R-SQUARE =    .9767    R-SQUARE ADJUSTED =    .9734
VARIANCE OF THE ESTIMATE-SIGMA**2 =   .22170E-04
STANDARD ERROR OF THE ESTIMATE-SIGMA =   .47085E-02
SUM OF SQUARED ERRORS-SSE=   .37689E-03
MEAN OF DEPENDENT VARIABLE =   134.51
LOG OF THE LIKELIHOOD FUNCTION = -46.0030

                        ASYMPTOTIC
                       CONDITIONAL                               BOX-COX
VARIABLE   ESTIMATED  STANDARD   T-RATIO      PARTIAL STANDARDIZED ELASTICITY
  NAME   COEFFICIENT   ERROR   ***** DF  P-VALUE CORR. COEFFICIENT  AT MEANS
INCOME     .21745     .2365E-01   9.196     .000  .926      .3504     1.2697
PRICE    -.68670      .2587E-01  -26.54     .000 -.990    -1.0113     -.8421
CONSTANT   2.7933     .1107      25.23     .000  .989      .0000    16.3104
```